



AL 151 Să se determine parametrul $m \in \mathbb{R}$ astfel încât ecuația $X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & m & m^2 \end{pmatrix}$, să aibă soluție nesingulară.

$$X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & m & m^2 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 1$$

$${}^t A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 11 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 11 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & m & m^2 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & m & m^2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 11 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6+m \\ 0 & 1 & -4 \\ 0 & m & m^2-5m \end{pmatrix}$$

$$\det X = \begin{vmatrix} 1 & -4 \\ m & m^2-5m \end{vmatrix} = m^2 - 5m + 4m = m^2 - m$$

$$\text{Nesingulară: } m^2 - m \neq 0 \Rightarrow m \notin \{0;1\}$$

a



AL 152 Soluția ecuației $X \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -4 & 1 & -12 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = (1 \ 2 \ 3)$ este:

$$(x \ y \ z) \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 & 5 \\ -4 & 1 & -12 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix} = (1 \ 2 \ 3)$$

$$(2x - 4y + z \ y \ 5x - 12y + 3z) = (1 \ 2 \ 3)$$

$$\begin{cases} 2x - 4y + z = 1 \\ y = 2 \\ 5x - 12y + 3z = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x + z = 9 \\ y = 2 \\ 5x + 3z = 27 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 6x + 3z = 27 \\ y = 2 \\ -5x - 3z = -27 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 0 \\ y = 2 \\ z = 3 \end{cases} \quad X = (0 \ 2 \ 9)$$

d



AL 153 Să se afle numărul real a astfel încât $\det(X) = 3$, unde X este soluția ecuației

$$X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ a & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 1$$

$${}^tA = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 7 \\ 1 & 1 & 1 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$A^* = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 7 & 14 & -6 \\ 3 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 7 & 14 & -6 \\ 3 & 7 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 7 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ a & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ a & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot A^{-1}$$

$$X = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ a & 1 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -1 & -2 & 1 \\ 7 & 14 & -6 \\ 3 & 7 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 14 & -6 \\ 4 & 9 & -4 \\ -a+4 & -2a+7 & a-3 \end{pmatrix}$$

$$\det A = 3$$

$$63(a-3) - 24(-2a+7) - 56(-a+4) - 56(a-30) + 28(-2a+7) + 54(-a+4)$$

$$3 = 7(a-3) + 4(-2a+7) - 2(-a+4)$$

$$3 = 7a - 21 - 8a + 28 + 2a - 8$$

$$a = 4$$



AL 154 Să se determine matricea X care verifică ecuația $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -10 & 4 & -5 \\ 7 & -3 & 4 \end{pmatrix}.$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot X = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -10 & 4 & -5 \\ 7 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -10 & 4 & -5 \\ 7 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2a+d & 2b+e & 2c+f \\ -a+3d & -b+3e & -c+3f \\ a-2d & b-2e & c-2f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 3 \\ -10 & 4 & -5 \\ 7 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a+d=-1 \\ 2b+e=-1 \\ 2c+f=3 \\ -a+3d=-10 \\ -b+3e=4 \\ -c+3f=-5 \\ a-2d=7 \\ b-2e=-3 \\ c-2f=4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ d=-3 \\ b=-1 \\ e=1 \\ c=2 \\ f=-1 \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

b



AL 155 Să se găsească matricele M_1 și M_2 astfel încât $M_1 \cdot M_2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \\ 3 & -9 & -2 \end{pmatrix}$, unde

$$M_1 = \begin{pmatrix} m_{11} & 0 & 0 \\ m_{12} & m_{13} & 0 \\ m_{14} & m_{15} & m_{16} \end{pmatrix} \text{ și } M_2 = \begin{pmatrix} 1 & m_{21} & m_{22} \\ 0 & 1 & m_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} m_{11} & 0 & 0 \\ m_{12} & m_{13} & 0 \\ m_{14} & m_{15} & m_{16} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & m_{21} & m_{22} \\ 0 & 1 & m_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \\ 3 & -9 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} m_{11} & m_{11}m_{21} & m_{11}m_{22} \\ m_{12} & m_{12}m_{21} + m_{13} & m_{12}m_{22} + m_{13}m_{23} \\ m_{14} & m_{14}m_{21} + m_{15} & m_{14}m_{22} + m_{15}m_{23} + m_{16} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ -1 & 5 & 2 \\ 3 & -9 & -2 \end{pmatrix}$$

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

$$M_2 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

d

$$\left\{ \begin{array}{l} m_{11} = 1 \\ m_{12} = -1 \\ m_{14} = 3 \\ m_{11}m_{21} = -3 \\ m_{12}m_{21} + m_{13} = 5 \\ m_{14}m_{21} + m_{15} = -9 \\ m_{11}m_{22} = 0 \\ m_{12}m_{22} + m_{13}m_{23} = 2 \\ m_{14}m_{22} + m_{15}m_{23} + m_{16} = -2 \end{array} \right. \Rightarrow \left\{ \begin{array}{l} m_{11} = 1 \\ m_{12} = -1 \\ m_{14} = 3 \\ m_{21} = -3 \\ m_{13} = 2 \\ m_{15} = 0 \\ m_{22} = 0 \\ m_{23} = 1 \\ m_{16} = -2 \end{array} \right.$$



AL 156 Să se determine suma elementelor matricei X care verifică ecuația

$$X - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \cdot X \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & -7 \\ -1 & 6 \end{pmatrix}.$$



AL 157 * Fie $M = xI_2 + yA \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, $x, y \in \mathbb{R}$, unde $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ și $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

Să se determine inversa lui M .

$$M = xI_2 + yA = x \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+y & -y \\ 2y & x+3y \end{pmatrix}$$

$$\det M = x^2 + 4xy + 5y^2 \neq 0$$

$${}^tM = \begin{pmatrix} x+y & 2y \\ -y & x+3y \end{pmatrix}$$

$$M^* = \begin{pmatrix} x+3y & y \\ -2y & x+y \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} = \frac{1}{x^2 + 4xy + 5y^2} \begin{pmatrix} x+3y & y \\ -2y & x+y \end{pmatrix}$$

C



AL 158 Fie $M_a = \left\{ \begin{pmatrix} xy & x+3 \\ x-3 & xy \end{pmatrix} : x^2 - x^2y^2 = a, a \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

Mulțimea valorilor reale ale lui a , pentru care inversa unei matrice oarecare din M_a aparține de asemenea lui M_a este:



AL 159 Fie matricea $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Să se calculeze $\text{Trace}[(A^2)^{-1}]$, unde $\text{Trace}(A)$ este suma elementelor de pe diagonala principală a matricei A .

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 & 4 \\ -2 & 0 & -2 \\ -4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

$$\det(A^2) = 36$$

$$[(A^2)^{-1}] = \begin{pmatrix} -\frac{1}{9} & -\frac{1}{18} & -\frac{1}{9} \\ \frac{1}{18} & \frac{7}{9} & -\frac{4}{9} \\ \frac{1}{9} & -\frac{4}{9} & \frac{1}{9} \end{pmatrix}$$

$$\text{Trace}[(A^2)^{-1}] = \frac{7}{9}$$

d



AL 160 * Să se determine valorile parametrului real m astfel încât matricea $A = \begin{pmatrix} 5 & m+1 & x+1 \\ x & x-1 & 1 \\ 2 & m & 1 \end{pmatrix}$ să fie inversabilă pentru orice $x \in \mathbb{R}$.



AL 161 Determinați toate relațiile pe care trebuie să le satisfacă parametrii $a, b \in \mathbb{R}$ astfel încât matricea să fie inversabilă.

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix}$$

Matricea este inversabilă $\Leftrightarrow \det A \neq 0$

$$\begin{aligned} \det A &= \begin{vmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a+2b & b & b \\ a+2b & a & b \\ a+2b & b & a \end{vmatrix} = (a+2b) \begin{vmatrix} 1 & b & b \\ 1 & a & b \\ 1 & b & a \end{vmatrix} = (a+2b) \begin{vmatrix} 1 & b & b \\ 0 & a-b & 0 \\ 0 & 0 & a-b \end{vmatrix} = \\ &= (a+2b)(a-b)^2 \end{aligned}$$

$$a \neq -2b$$

$$a \neq b$$

d



AL 162 * Soluția ecuației $Y^2 = A$, $Y \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$, unde $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ este:

Fie $Y = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

$$Y^2 = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a^2 + bc = 0 \\ b(a + d) = 0 \\ c(a + d) = 1 \\ bc + d^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a^2 = 0 \\ b = 0 \\ c(a + d) = 1 \\ d^2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a = 0 \\ b = 0 \\ c \cdot 0 = 1 \\ d = 0 \end{cases} \Rightarrow \text{sistemul nu are soluții}$$

d



AL 163 * Câte soluții are ecuația matriceală: $X^2 = (2X)^t$, $X \in M_2(\mathbb{Z})$?



AL 164 * Să se determine valorile parametrului $a \in \mathbb{R}$, pentru care matricea este inversabilă.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ a^2 & 1 & a \\ a & a^2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & a^2 \\ a^2 & 1 & a \\ a & a^2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det A = a^6 - 2a^3 + 1$$

$$\det A = (a^3 - 1)^2$$

A este inversabilă: $a \in \mathbb{R} - \{1\}$

d



AL 165 Fie matricea $A = (a_{ij})_{i,j=1,2,3}$ cu elementele date de

$$a_{ij} = \begin{cases} (-1)^{i+j}, & i = j, \\ (-1)^{i+j} C_j^i, & i < j, \\ 0, & i > j. \end{cases} \quad \text{Să se calculeze } A^{-1}.$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

a



AL 166 * Se consideră mulțimea $\mathcal{M} = \left\{ A(a) = \begin{pmatrix} 1 & 5a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{Z} \right\}$.

Să se calculeze $B(a) = A(a) + A^2(a) + \dots + A^n(a)$ și să se determine $a \in \mathbb{Z}$, astfel încât $\frac{1}{n} B(a) \in \mathcal{M}$, pentru orice $n \in \mathbb{Z}^*$.
